ВАРИАЦИОННАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ПОДЗЕМНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ

Р.В. Шаймуратов

Казанский государственный педагогический университет
shaimur@KSPU.KSU.RAS.RU

В настоящее время основным методом решения начальных, краевых и начально-краевых задач подземной гидродинамики является сеточный метод. Наряду с наиболее универсальным методом конечных разностей [1], обширный класс этих задач может быть реализован вариационными [2] и проекционными [3] методами. Эти методы просты в использовании. Они позволяют строить приближенные аналитические решения с заданной точностью.

Ниже установим интегральные вариационные принципы, позволяющие решать задачи линейной и нелинейной фильтрации методом Ритца.

Линейные задачи. 1. Краевые задачи установившейся линейной фильтрации в неоднородных средах произвольной формы, вскрытых системой нагнетательных и добывающих скважин, сводятся к интегрированию уравнения эллиптического типа [4 – 6]

$$Tp \equiv -div[k(M)\nabla p(M) = \mu N(M), \quad M(x,y,z)\in\Omega, \tag{1}$$

вместе с дополнительными условиями

$$p(M)=\varphi_1(M), \ M\in\omega_1; \ k(M)\frac{\partial p}{\partial n}=\varphi_2(M), \ M\in\omega_2;$$

$$k(M)\frac{\partial p}{\partial n}+\alpha(M)p(M)=\varphi_3(M), \quad M\in\omega_3, \tag{2}$$

где $\omega=\sum_{j=1}^{3}\omega_j$ - граница трехмерной области фильтрации Ω; p – искомая функция давления; k – заданная функция проницаемости породы; μ - вязкость жидкости; α, φ_j $(j=\overline{1,3})$ - некоторые известные дифференцируемые функции; $\vec{n}$ - внешняя нормаль к поверхности ω; ∇ - символ градиента; N – функция отбора (закачки) жидкости. Из наиболее общей задачи (1), (2) как частный случай при $\omega_2=\omega_3=\varnothing$ имеем первую, при $\omega_1=\omega_3=\varnothing$ - вторую, при $\omega_1=\omega_2=\varnothing$ - третью краевые задачи ($\varnothing$ - пустое множество).

Построим функционал J так, чтобы решение задачи (1), (2) стало равносильным нахождению функции p(M), при которой J принимает экстремальное значение:

$$J[p(M)] = \int_{\Omega}[k(\nabla p)^2 - 2\mu Np]d\Omega - 2\int_{\omega_1} k(p-\varphi_1)\frac{\partial p}{\partial n}d\omega -$$
$$-2\int_{\omega_2} p\varphi_2 d\omega + \int_{\omega_3}(\alpha\, p - 2\varphi_3)pd\omega. \qquad (3)$$

Действительно, после несложных преобразований первой вариации δJ функционала (3) с помощью формул

$$\vec{a}\nabla b = div(b\vec{a}) - bdiv\vec{a}, \quad \int_{\Omega} div(b\vec{a})d\Omega = \int_{\omega} b\frac{\partial a}{\partial n}d\omega \qquad (4)$$

получим

$$0{,}5\delta J = -\int_{\Omega}[div(k\nabla p) + \mu N]\,\delta p d\Omega - \int_{\omega_1} k(p-\varphi_1)\delta\frac{\partial p}{\partial n}d\omega + \int_{\omega_2}(k\frac{\partial p}{\partial n} - \varphi_2)\delta p d\omega +$$
$$+\int_{\omega_3}(k\frac{\partial p}{\partial n} + \alpha p - \varphi_3)\delta p d \qquad (5)$$

Согласно основной лемме вариационного исчисления, из (5) с учетом (1), (2) имеем необходимое условие экстремума функционала (3): δ J=0. Покажем, что при подстановке действительного распределения давления p(M) в продуктивной залежи Ω в J функционал (3) принимает минимальное значение, т.е. вторая вариация δ^2 J положительна,

$$0{,}5\delta^2 J = A + \int_{\Omega} k(\nabla\delta\, p)^2 d\Omega + \int_{\omega_2}\alpha(\delta\, p)^2 d\omega - 2\int_{\omega_1}\delta\frac{\partial p}{\partial n}\delta\, pd\omega. \qquad (6)$$

Здесь A совпадает с правой частью (5), если δp заменить на $\delta^2 p$, A=0; на части поверхности ω_1 δp=0, следовательно, $\delta^2 J > 0$.

В итоге справедлива **теорема 1 (вариационный принцип):** *при истинном распределении давления в области фильтрации Ω, удовлетворяющем уравнению (1) и условиям (2), функционал (3) имеет стационарное значение.*

2. При упругом режиме соответствующие начально-краевые задачи сводятся к интегрированию уравнения параболического типа [4 – 6]

$$Tp(M,t) = \mu N(M,t) - \mu\beta\frac{\partial p}{\partial t}, \quad M \in \Omega, \quad t > 0 \qquad (7)$$

(β - упругоемкость породы) вместе с начальным условием

$$P(M,0)=f(M) \tag{8}$$

и с условиями вида (2) (зависящими от x, y, z, t).Решение последней задачи равносильно нахождению экстремали для функционала

$$J[p(M,t)]=\sum_{m=1}^{7}(-1)^{m+1}J_m,\ J_1=\int\limits_{\Omega}2\mu N*pdM,\ \ J_2=\int\limits_{\Omega}k\nabla p*\nabla pdM, \tag{9}$$

$$J_3=2\int\limits_{\omega_1}k(p-\varphi_1)*\frac{\partial p}{\partial n}dM_\omega,\ ,\quad J_4=\int\limits_{\Omega}2\mu\beta\frac{\partial p}{\partial n}*pdM,\ J_5=2\int\limits_{\omega_2}\varphi_2*pdM_\omega,$$

$$J_6=\int\limits_{\Omega}\mu\beta[p(M,0)-2f(M)]p(M,\tau)dM,\quad J_7=\int\limits_{\omega_3}(2\varphi_3*p-\alpha p*p)dM_\omega.$$

Здесь через $a*b$ обозначена свертка $\int\limits_0^\tau a(M,t)b(M,\tau-t)dt$ функций $a,b;$ $[0,\tau]$ - выбираемый промежуток времени при исследовании поля давления.

Преобразуя интегралы первой вариации функционала J, имеем

$$0{,}5\delta J=\int\limits_{\omega}\left[div(k\nabla p)+\mu N-\mu\beta\frac{\partial p}{\partial n}\right]*\delta pdM+\mu\beta\int\limits_{\Omega}[f(M)-$$

$$-p(M,0)\delta p(M,\tau)dM+\int\limits_{\omega_1}k(p-\varphi_1)*\delta\frac{\partial p}{\partial n}dM_\omega+\int\limits_{\omega_2}(\varphi_2-k\frac{\partial p}{\partial n})* \tag{10}$$

$$*\partial pdM_\omega+\int\limits_{\omega_3}(\varphi_3-\alpha p-k\frac{\partial p}{\partial n})*\delta pdM_\omega.$$

Воспользовавшись основной леммой вариационного исчисления, дифференциальным уравнением и дополнительными условиями исходной начально-краевой задачи, получим, что $\delta J=0$.

Теорема 2: *при истинном распределении давления, удовлетворяющем в промежутке времени $[0,\tau]$ уравнению (7), условиям (2), (8), функционал (9) имеет стационарное значение.*

Заметим, приближенное решение, описывающее поле давлений при любом t>0 (не фиксируя τ), может быть получено операционным методом Лапласа с последующим построением соответствующего функционала [6].

3. Аналогично устанавливается интегральный вариационный принцип для начально-краевых задач, описывающих фильтрационные течения при ограниченной скорости изменения давления в области Ω. Имеет место **теорема 3:** *при подстановке решения уравнения*

$$\Delta p + \frac{\mu}{k} N = \frac{1}{\aleph}\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}$$

($\aleph$ - коэффициент пьезопроводности, c – скорость звука в жидкости, Δ - оператор Лапласа), удовлетворяющего начальным (8), $p_t'(M,0) = f_1(M)$ и граничным условиям вида (2) (с учетом временных изменений), в функционал

$$J[p(M,t)] = \int_{\Omega} \{ k\nabla p * \nabla p - 2\mu N * p + \mu\beta \frac{\partial p}{\partial t} * p + \frac{k}{c^2}\frac{\partial p}{\partial t} * \frac{\partial p}{\partial t} + \\ + \mu\beta[p(M,0) - 2f]p(M,\tau) + \frac{2k}{c^2}[p(M,0) - f]p_t'(M,\tau) - \\ - \frac{2k}{c^2} f_1 p(M,\tau)\} d\Omega - 2\int_{\omega_1} k(p - \varphi_1) * \frac{\partial p}{\partial n} d\omega - 2\int_{\omega_2} p * \varphi_2 d\omega + \\ + \int_{\omega_3} (\alpha p * p - 2p * \varphi_3) d\omega \tag{11}$$

последний принимает экстремальное значение.

Нелинейные задачи. Краевые задачи нелинейной фильтрации в чисто трещиноватых и трещиновато-пористых средах сводятся к интегрированию нелинейных дифференциальных уравнений

$$div[B_j(|\nabla p|)\nabla p] + \Phi = 0 \quad (j = \overline{1,6}, \quad \Phi = \sum_{i=1}^{R} N_i) \tag{12}$$

при соответствующих граничных условиях, где функциональные зависимости для $B_j (j = \overline{1,6})$ получены в работе [6].

В частности, установим интегральный вариационный принцип, когда исследуется фильтрационное течение неньютоновской жидкости пластической вязкости η с градиентом сдвига δ в трещиноватой среде проницаемости k со скоростью

$$\overline{V} = -\frac{k}{\eta}\left[\sqrt{\delta^2 + (\nabla p)^2} - \delta\right]\frac{\nabla p}{|\nabla p|} = -B(|\nabla p|)\nabla p \qquad (B_j = B), \tag{13}$$

на частях $\omega_{1,2}$ поверхности ω заданы условия

$$p(M) = \varphi_1(M), M \in \omega_1; \quad \upsilon_n(M) = (\overline{\upsilon} \cdot \overline{n}) = 0, \ M \in \omega_2. \tag{14}$$

Построив функционал

$$J = \int_{\Omega}\left\{\frac{k}{\eta}[\delta^2 \ln(\sqrt{\delta^2 + |\nabla p|^2} + |\nabla p|) + |\nabla p|(\sqrt{\delta^2 + |\nabla p|^2} - 2\delta)] - 2\Phi\right\} d\Omega, \tag{15}$$

имеем

$$0{,}5\delta J = -\int\limits_{\Omega}\{div[B(|\nabla p|)\nabla p] + \Phi\}\delta p d\Omega + \left(\int\limits_{\omega_1} + \int\limits_{\omega_2}\right) B(|\nabla p|)\frac{\partial p}{\partial n}\delta p d\omega = 0,$$

$$0{,}5\delta^2 J = D + 2\int\limits_{\Omega} B'(|\nabla p|)(\nabla p \nabla \delta p)^2 d\Omega > 0.$$

Здесь D совпадает с выражением для $0{,}5\delta J$, если δp заменить на $\delta^2 p$, следовательно, D=0; справедлива **теорема 4:** *при истинном распределении давления p(M) в области фильтрации Ω, удовлетворяющем уравнению (12), (13), условиям (14), функционал (15) имеет стационарное значение.*

Заметим, для задач $j = \overline{1,6}$ с уравнениями (12), условиями (14)

$$J_j[p(M)] = \int\limits_{\Omega}\left[\int\limits_0^{|\nabla p|} B_j(\xi)\xi d\xi - \Phi p\right] d\Omega,$$

поскольку все J_j могут быть преобразованы к виду (15).

ЛИТЕРАТУРА

1. Самарский А.А. *Введение в численные методы.* – М.: Наука, 1982. – 271 с.

2. Михлин С.Г. *Численная реализация вариационных методов.* – М: Наука, 1966. – 432 с.

3. Красносельский М.А., Вайникко Г.М., Забрейко П.П., Рутицкий Я.Б., Стеценко В.Я. *Приближенное решение операторных уравнений.* – М: Наука, 1969. – 456 с.

4. Чарный И.А. *Подземная гидрогазодинамика.* – М: Гостоптехиздат, 1963. – 396 с.

5. Булыгин В.Я. *Гидромеханика нефтяного пласта.* – М: Недра, 1974. – 230 с.

6. Шаймуратов Р.В. *Гидродинамика нефтяного трещиноватого пласта.* – М: Недра, 1980. – 224 с.